Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Влияние методов дефаззификации на скорость настройки нечеткой модели // Кибернетика и системный анализ. – 2002. – №5. – С.169–176

УДК 62-50

Влияние методов дефаззификации на скорость настройки нечеткой модели

Ротштейн А.П., Штовба С.Д.

Введение

Дефаззификация (от англ. defuzzification) это преобразование нечеткого множества в четкое число [1]. Операция дефаззификации является необходимым элементом идентификации нелинейных зависимостей посредством настройки (обучения) нечетких баз знаний [2-4]. Простейшим способом выполнения этой операции является выбор четкого числа, соответствующего максимуму функции принадлежности [5]. Однако пригодность этого способа ограничивается лишь одноэкстремальными функциями принадлежности. Для многоэкстремальных функций принадлежности в литературе по теории нечетких множеств операцию дефаззификации предлагается выполнять методами центра тяжести, медианы и центра максимумов [1,6,7].

Поскольку операция дефаззификации входит в критерий качества настройки нечеткой модели [3], то представляет интерес выбор такого способа выполнения этой операции, который обеспечивает наилучшие показатели скорости и точности процедуры настройки. Эта статья является развитием работы [3]. В ней излагаются результаты компьютерных экспериментов, в которых методы дефаззификации исследовались во взаимосвязи с показателями качества настройки нечетких моделей.

1. Задача настройки нечеткой модели

Нами рассматривается объект вида

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

с n входами (x_i, $i = \overline{1,n}$) и одним выходом (y), для которого известны количественные интервалы изменения входов $[\underline{x}_i, \overline{x}_i]$ ($i = \overline{1,n}$) и выхода $[\underline{y}, \overline{y}]$. Предполагается, что взаимосвязь «входы-выход» может быть представлена в виде нечеткой базы знаний, которая представляет собой следующую совокупность высказываний:

$$\text{ЕСЛИ} \quad \left[\left(x_1 = a_1^{j1}\right) \ \text{И} \left(x_2 = a_2^{j1}\right) \ \text{И} \ldots \ \left(x_n = a_n^{j1}\right)\right] \quad \left(\text{с весом } \alpha_{j1}\right)$$

$$\text{ИЛИ} \quad \left[\left(x_1 = a_1^{j1}\right) \ \text{И} \left(x_2 = a_2^{j1}\right) \ \text{И} \ldots \ \left(x_n = a_n^{j1}\right)\right] \quad \left(\text{с весом } \alpha_{j1}\right)$$

$$\ldots \ \text{ИЛИ} \quad \left[\left(x_1 = a_1^{j1}\right) \ \text{И} \left(x_2 = a_2^{j1}\right) \ \text{И} \ldots \ \left(x_n = a_n^{j1}\right)\right] \quad \left(\text{с весом } \alpha_{j1}\right)$$

$$\text{ТО} \quad y \in d_j = \left[y_{j-1}, y_j\right), \qquad \text{для всех } j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где a_j^p - лингвистический терм, которым оценивается переменная x_i в строчке с номером jp ($p = k_j$);

k_j - количество строчек - конъюнкций, в которых выход y оценивается нечетким термом d_j, $j = \overline{1,m}$;

α_p - число в диапазоне $[0,1]$, которое характеризует субъективную меру уверенности эксперта в части высказывания с номером jp ($p = jk_j$, $p = jk_j$).

Система (2) рассматривается здесь как обобщение базы знаний, предложенной в работе [3], на случай, когда выходная переменная оценивается нечеткими термами.

Пусть $\mu^{jp}(x_i)$ - функция принадлежности входа x_i нечеткому терму a_i^p, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $p = k_j$, т. е. $a_i^p = \int_{\underline{x}_i}^{\overline{x}_i} \mu^p(x_i)/x_i$; $\mu^{d_j}(y)$ - функция принадлежности выхода y нечеткому терму $d_j = \left[y_{j-1}, y_j\right]$, $j = \overline{1,m}$, т. е. $a_i^p = \int_{\underline{x}_i}^{\overline{x}_i} \mu^p(x_i)/x_i$.

Тогда согласно работе [3], степень принадлежности конкретного входного вектора $X^* = \{x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*\}$ нечетким термам $d_j = \left[y_{j-1}, y_j \right]$ определяется следующей системой нечетких логических уравнений:

$$\mu^{d_j}(y) = \max_{p=\overline{1,k_j}} \left\{ \alpha_{jp} \min_{i=\overline{1,n}} \left[\mu^{jp}(x_i) \right] \right\}, \; j = \overline{1,m}. \tag{3}$$

Следуя [5], нечеткое множество $\tilde{y}$, соответствующее входному вектору X^*, определим следующим образом:

$$\tilde{y} = \bigcup_{j=\overline{1,m}} \int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \min\left(\mu^{d_j}(X^*), \mu^{d_j}(y)\right) / y, \tag{4}$$

где $\bigcup$ - операция объединения нечетких множеств.

Четкое значение выхода y, соответствующее входному вектору X^* определим как:

$$y = \mathrm{defuz}(\tilde{y}), \tag{5}$$

где defuz – операция дефаззификации нечеткого множества.

Для формализации термов, входящих в нечеткую базу знаний (2) будем использовать функции принадлежностей, введенные в работе [3]:

$$\mu^T(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-b}{c}\right)^2}, \tag{6}$$

где $\mu^T(x) = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{x-b}{c}\right)^2}$ функция принадлежности переменной *x* произвольному нечеткому терму T;

b и c -параметры настройки: b - координата максимума функции, $\mu^T(b) = 1$; c - коэффициент концентрации-растяжения функции.

Соотношения (3)-(6) определяют нечеткую модель объекта (1), структура которой соответствует базе знаний (2). Запишем эту модель в виде:

$$y = F\ (X,\ A,\ B,\ C), \tag{7}$$

где $X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ - входной вектор; $A = \left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N\right)$ - вектор весов правил-строчек в нечеткой базе знаний (2); $B = \left(b_1, b_2, \ldots, b_q\right)$ и $C = \left(c_1, c_2, \ldots, c_q\right)$ - векторы параметров настройки функций принадлежности типа (6) нечетких термов, которыми оцениваются входы и выход объекта (1); N -общее количество правил-строчек в (2); q - общее количество термов в (2); F - оператор связи входы-выход, соответствующий использованию соотношений (3)-(5).

Пусть обучающая выборка задана в виде M пар экспериментальных данных:

$$\left\{X_p, Y_p\right\}\ ,\ \ p = \overline{1, M}, \tag{8}$$

где $X_p = \left(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p\right)$ - входной вектор в h-ой паре, y_p -соответствующий выход.

Для нахождения вектора неизвестных параметров (A, B, C), которые минимизируют расхождение модельных (7) и экспериментальных (8) выходов объекта, воспользуемся методом наименьших квадратов. Тогда задача настройки нечеткой модели формулируется следующим образом :

найти такой вектор (A, B, C), который удовлетворяет ограничениям

$$\alpha_i \in \left[\underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i\right],\ i = \overline{1, N},\ b_j \in \left[\underline{b}_j, \bar{b}_j\right],\ c_j \in \left[\underline{c}_j, \bar{c}_j\right],\ j = \overline{1, q}$$

и обеспечивает

$$\sum_{p=1}^{M} \left[F\left(X_p, A, B, C\right) - y_p\right]^2 = \min_{A,B,C}\ . \tag{9}$$

Уместно заметить, что принципиальным отличием предложенной нечеткой модели (3)-(5) от аналогичной модели, использованной в [3], является дополнительная возможность настройки функций принадлежности выходной переменной y. При этом нечеткая модель [3], получается из формул (3)-(5) при использовании дефаззификации по методу центра тяжести и функций принадлежностей выходной переменной в виде

$$\mu^{d_j}(y) = \begin{cases} 1, & \text{для} \quad y \in [\underline{y} + (j-1)\cdot\Delta,\ \underline{y} + j\cdot\Delta] \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases},$$

где $\Delta = \dfrac{\underline{y} - \overline{y}}{m}$.

2.Методы дефаззификации

Наиболее распространенными способами выполнения операции дефаззификации (5) являются преобразования функции принадлежности методами [1,6,7]: а) центра тяжести; б) медианы; в) центра максимумов.

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{y} = \int_{[\underline{y},\overline{y}]} \mu_{\tilde{y}}(y)/y$ *по методу центра тяжести* осуществляется по формуле:

$$y = \frac{\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} y \cdot \mu_{\tilde{y}}(y)\, dy}{\int_{\underline{y}}^{\overline{y}} \mu_{\tilde{y}}(y)\, dy}. \tag{10}$$

Физическим аналогом формулы (10) является нахождение центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат и графиком функции принадлежности нечеткого множества.

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{y} = \int_{[\underline{y},\overline{y}]} \mu_{\tilde{y}}(y)/y$ *по методу медианы* состоит в нахождении числа такого y, что:

$$\int_{\underline{y}}^{y} \mu_{\tilde{y}}(y)\, dy = \int_{y}^{\overline{y}} \mu_{\tilde{y}}(y)\, dy. \tag{11}$$

Геометрической интерпретацией метода медианы является нахождения такой точки на оси абцисс, что перпендикуляр, восстановленный в этой точке, делит площадь под кривой функции принадлежности на две равные части.

Дефаззификация нечеткого множества $\tilde{y} = \int\limits_{[\underline{y},\overline{y}]} \mu_{\tilde{y}}(y)/y$ *по методу центра максимумов* осуществляется по формуле:

$$y = \frac{\int\limits_G y\,dy}{\int\limits_G dy}, \qquad (12)$$

где G – множество всех элементов из интервала $[\underline{y}, \overline{y}]$, имеющих максимальную степень принадлежности нечеткому множеству $\tilde{y}$.

В методе центра максимумов находится среднее арифметическое элементов универсального множества, имеющих максимальные степени принадлежностей. Если множество таких элементов конечно, то формула (12) упрощается к следующему виду:

$$y = \frac{\sum\limits_{y_j \in G} y_j}{|G|},$$

где $|G|$ - мощность множества G.

Из этой формулы видно, что если функция принадлежности имеет только один максимум, то его координата и является четким аналогом нечеткого множества.

В качестве примера рассмотрим дефаззификацию различными методами для нечеткого множества

$$\tilde{y} = \int_0^2 0.2/y + \int_2^3 0.4/y + \int_3^5 0.8/y + \int_5^7 1/y + \int_7^8 0.4/y + \int_8^9 0.6/y + \int_9^{10} 1/y. \qquad (13)$$

Применение метода центра тяжести (формула (10)) дает четкое число

$$y = \frac{\int_0^2 0.2\cdot y\,dy + \int_2^3 0.4\cdot y\,dy + \int_3^5 0.8\cdot y\,dy + \int_5^7 1\cdot y\,dy + \int_7^8 0.4\cdot y\,dy + \int_8^9 0.6\cdot y\,dy + \int_9^{10} 1\cdot y\,dy}{\int_0^2 0.2dy + \int_2^3 0.4dy + \int_3^5 0.8dy + \int_5^7 1dy + \int_7^8 0.4dy + \int_8^9 0.6dy + \int_9^{10} 1dy} = 6.27.$$

Применение метода медианы (11) дает четкое число y=5.4, поскольку для этого числа имеет место равенство

$$\int_0^2 0.2\cdot y dy + \int_2^3 0.4\cdot y dy + \int_3^5 0.8\cdot y dy + \int_5^{5.4} 1\cdot y dy = \int_{5.4}^7 1\cdot y dy + \int_7^8 0.4\cdot y dy + \int_8^9 0.6\cdot y dy + \int_9^{10} 1\cdot y dy$$

Применение метода центра максимумов (12) дает четкое число

$$y = \frac{\int_5^7 1\cdot y dy + \int_9^{10} 1\cdot y dy}{\int_5^7 1 dy + \int_9^{10} 1 dy} = 7.17\ .$$

Результаты дефаззификации различными методами нечеткого множества (13) показаны на рис.1.

3.Компьютерный эксперимент

Для генерации нечетких баз знаний и обучающих выборок использовались три эталонных модели «два входа – один выход»:

линейная

$$y = 60 + 4x_1 - 6x_2\ , \tag{14}$$

унимодальная

$$y = 0.25\left((1.7x_1 - 5)^2 + (0.7x_2 - 3)^4\right), \tag{15}$$

многоэкстремальная

$$y = 31 + 3x_1 + 40\sin(0.5x_1)\cos(x_2)\ , \tag{16}$$

в которых переменные изменялись в следующих диапазонах:

$$x_1 \in [0,10]\ ,\ x_2 \in [0,10]\ ,\ y \in [0,100]\ .$$

При построении нечетких баз знаний использовались термы:

Н – низкий, нС – ниже среднего, С – средний, вС – выше среднего, В – высокий.

Зависимостям (14)-(16) ставились в соответствие нечеткие базы знаний, представленные в табл. 1-3. Эти базы знаний определялись экспертно (путем наблюдения графиков) ***в результате наблюдения трехмерного изображения этих*** зависимостей (14)-(16). В ходе эксперимента нечеткие базы знаний (табл. 1-3) настраивались для каждого из методов дефаззификации, задаваемых формулами (10)-(12). При этом строились кривые обучения в виде зависимостей точности настройки (R) от времени обучения (t). Эксперименты проводились в пакете MatLab на персональном компьютере с процессором Pentium-166. Обучающая выборка для всех экспериментов составляла 100 пар «входы-выход».

В результате проведенных экспериментов обнаружено, что наибольшие показатели скорости и точности настройки рассматриваемых нечетких моделей дает дефаззификация по методу центра тяжести (рис. 2). ***В качестве примера на рис.3 приведены результаты идентификации объекта (16)***

.

Заключение

Дефаззификация, т.е. преобразование нечеткого множества в четкое число, является необходимым элементом построения прикладных нечетких систем на базе нечеткой логики. В этой статье описаны результаты компьютерных экспериментов с эталонными зависимостями, в которых скорость настройки (обучения) нечетких моделей исследовалась для различных методов дефаззификации: центра тяжести, медианы и центра максимумов. Описанные в статье и другие, проведенные нами компьютерные эксперименты, дают основания полагать, что наилучшим методом дефаззификации при построении прикладных нечетких систем является метод центра тяжести.

Литература

1. Zimmermann H.-J. Fuzzy Set Theory and its Applications. 3rd ed.- Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.- 1996.- 435p.
2. Rotshtein A. Desig and Tuning of Fuzzy Rule-Based System for Medical Diagnosis. In Fuzzy and Neuro-Fuzzy Systems in Medicine (Teodorescu N.H. (ed.)). CRC-Press.-1998.-pp.243-289.
3. Ротштейн А.П., Кательников Д.И. Идентификация нелинейных зависимостей нечеткими базами знаний // Кибернетика и системный анализ.- 1998.- №5.- С.53-61.
4. Ротштейн А.П., Лойко Е.Е., Кательников Д.И. Прогнозирование количества заболеваний на основе экспертно-лингвистической информации // Кибернетика и системный анализ.- 1999.- №2.- С.178-185.

5. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и ее применение к принятию приближенных решений.- М.: Мир.- 1976.- 167с.

6. Прикладные нечеткие систем. Пер. с япон./ Асаи К., Ватада Д. и др. – М.: Мир, 1993.- 368с.

7. Yager R., Filev D. Essential of Fuzzy Modeling and Control. John Willey & Sons.-1994.- 388р.

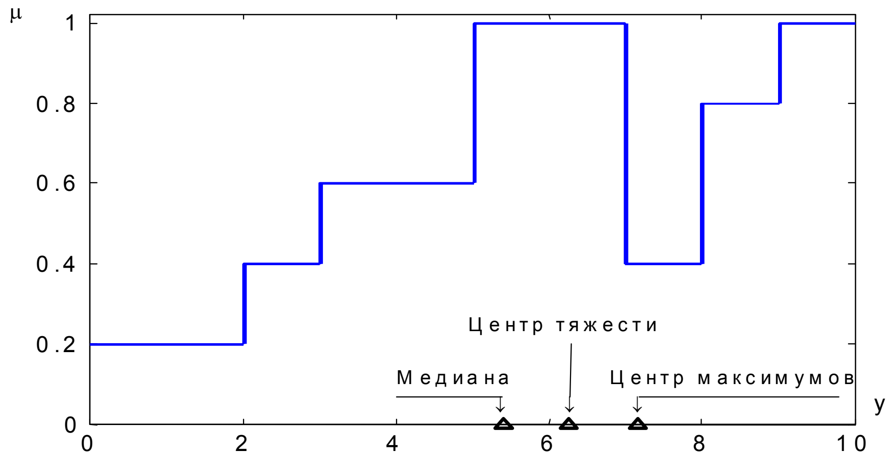
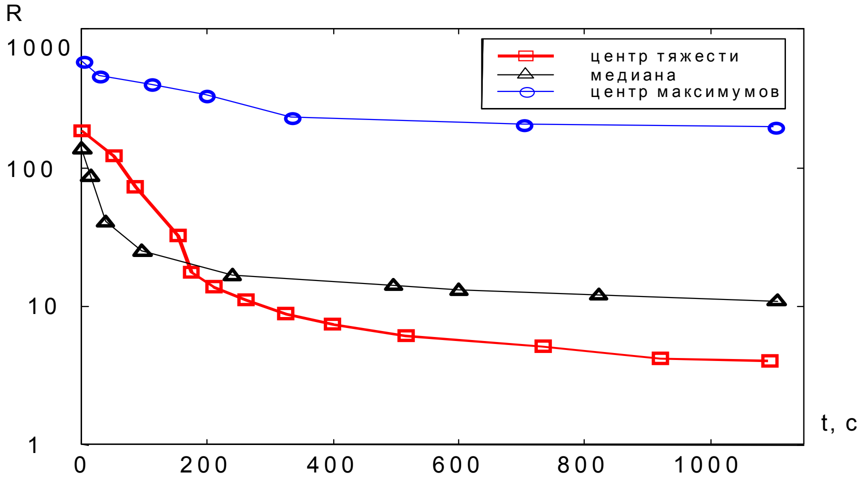
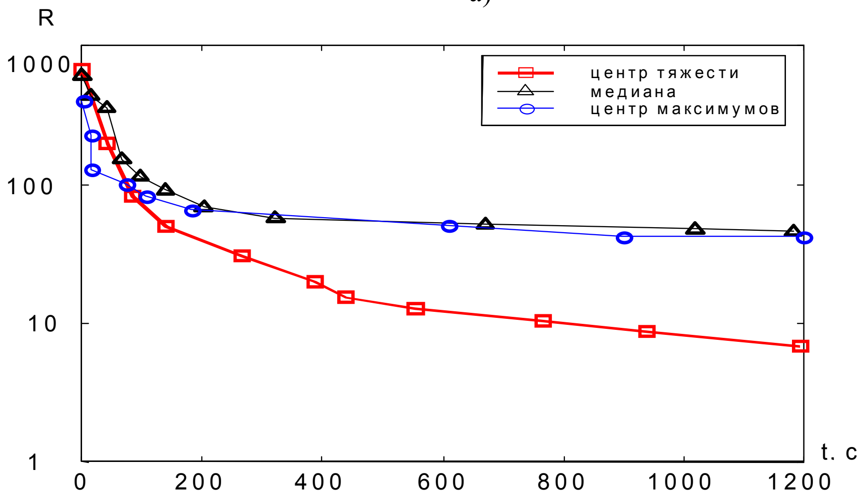


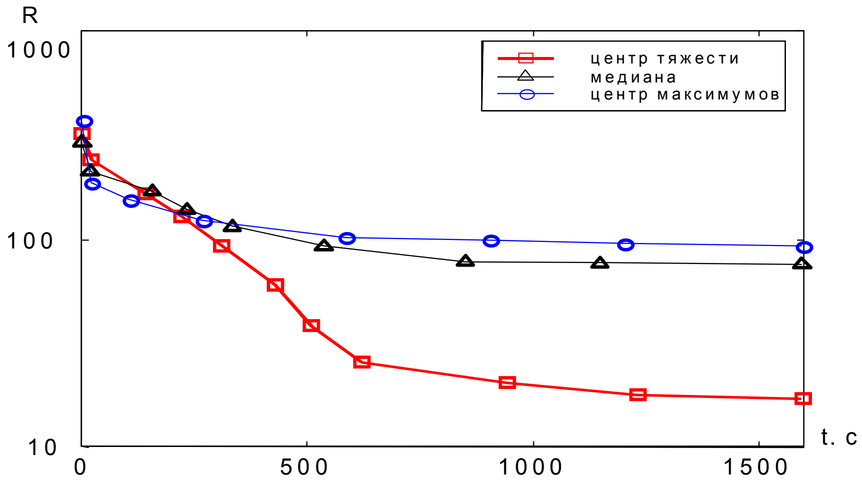
Рисунок 1. Дефаззификация разными методами



а)



б)



в)

Рисунок 2. Кривые обучения нечетких моделей для различных методов дефаззификаци
а) при линейной эталонной зависимости;
б) при унимодальной эталонной зависимости;
в) при многоэкстремальной эталонной зависимости

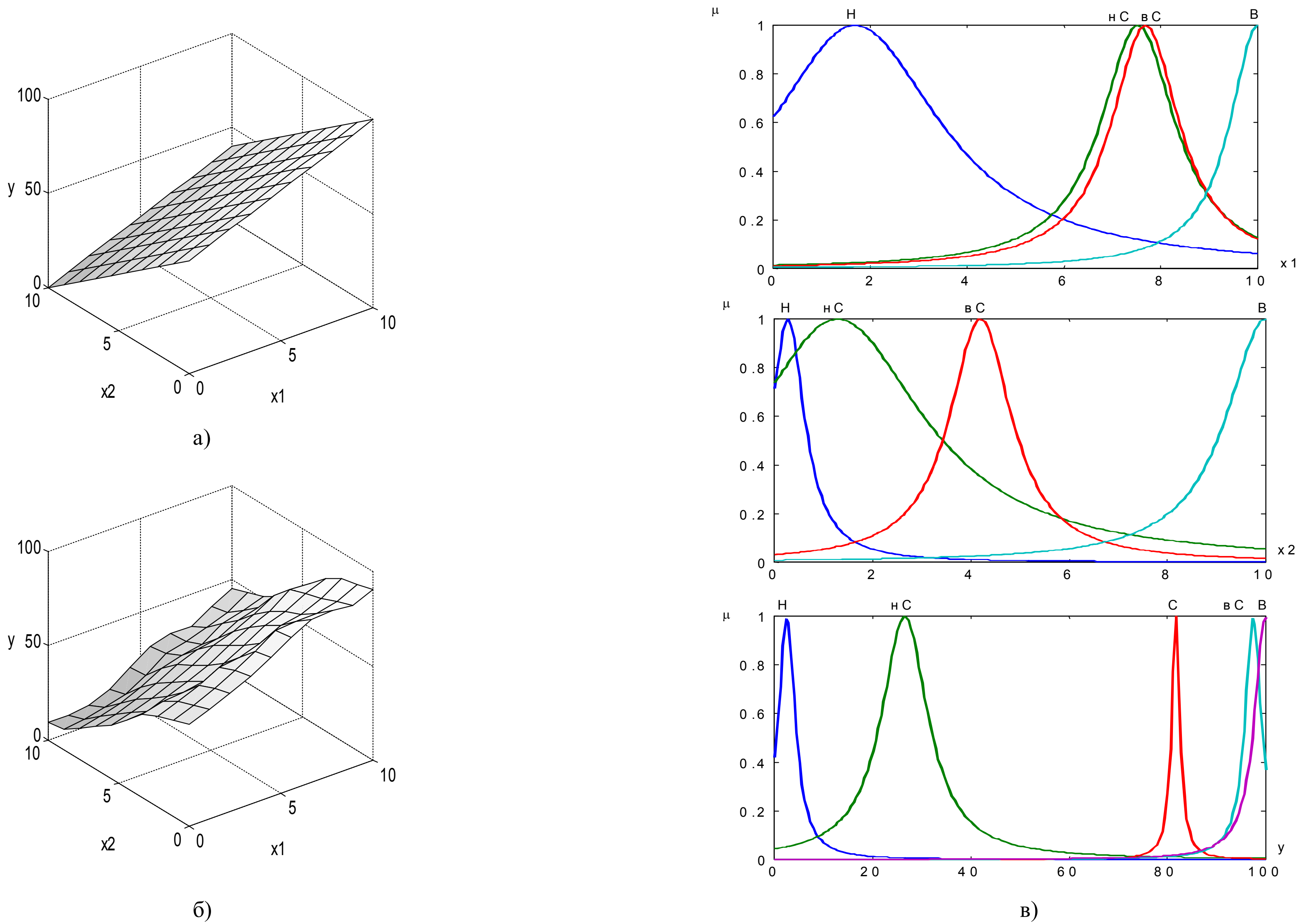
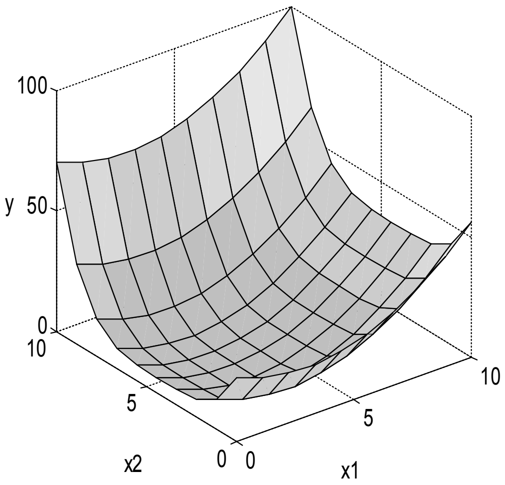
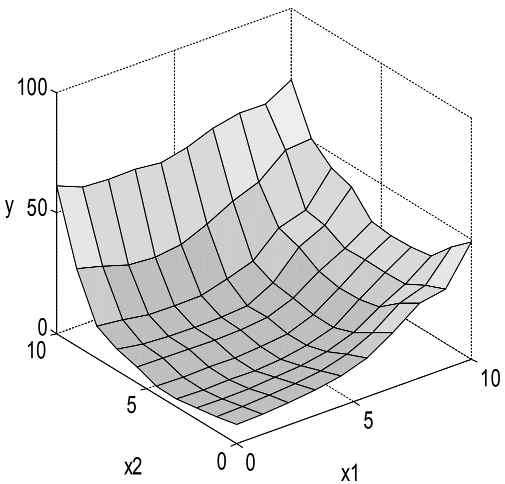


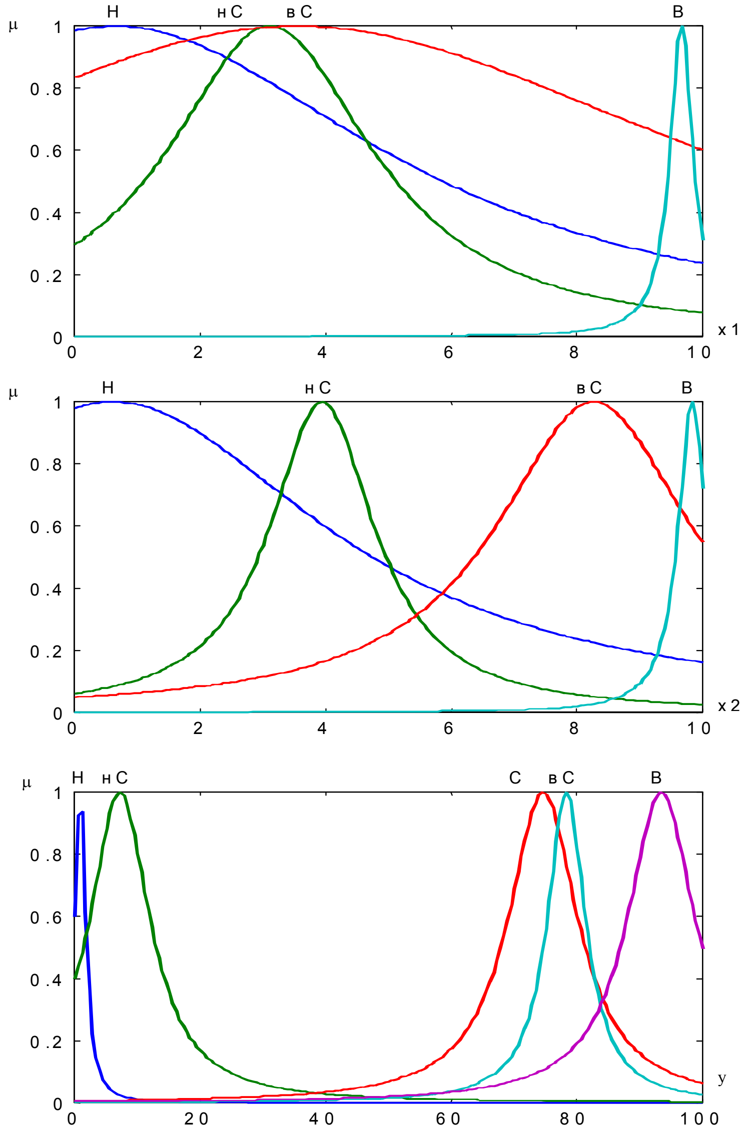
Рис 3. Идентификация зависимости (14)
а) эталоная зависимость; б) нечеткая модель
в) функции принадлежностей после настройки



а)



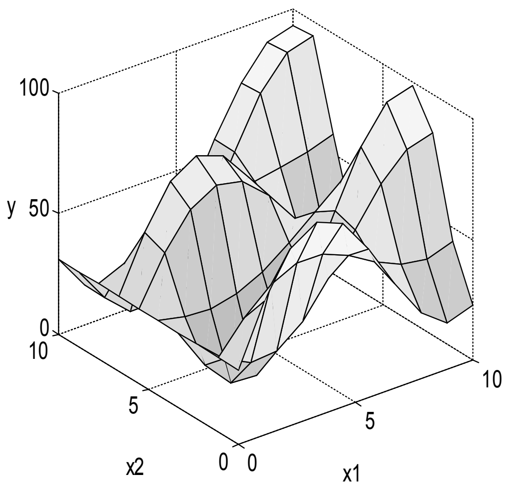
б)



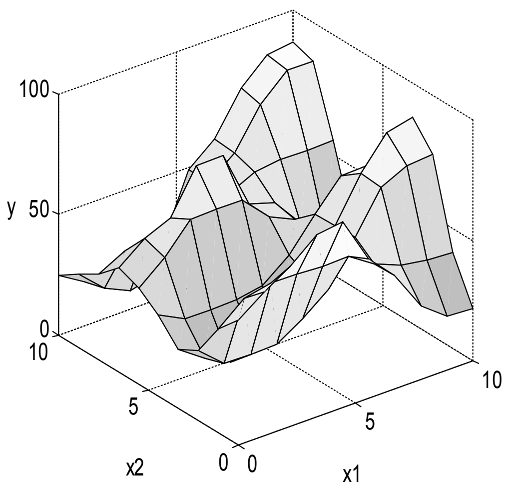
в)

Рис 4. Идентификация зависимости (15)

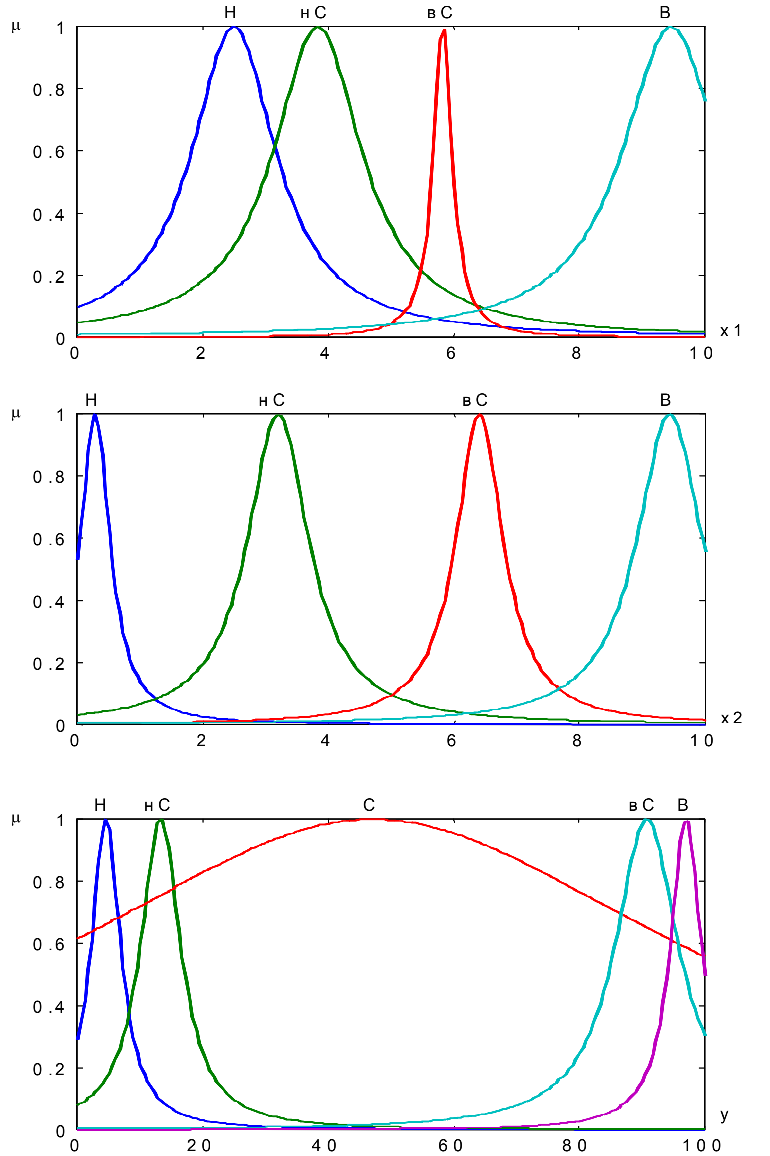
а) эталоная зависимость; б) нечеткая модель в) функции принадлежностей после настройки



а)



б)



в)

Рис 5. Идентификация зависимости (16)

а) эталоная зависимость; б) нечеткая модель в) функции принадлежностей после настройки

Таблица 1

База знаний для зависимости (13)

x_1	x_2	y
Н	В	Н
Н	вС	нС
вС	В	нС
нС	нС	С
вС	вС	С
нС	Н	вС
В	нС	вС
В	Н	В

Таблица 2

База знаний для зависимости (14)

x_1	x_2	y
Н	нС	Н
Н	вС	Н
нС	вС	Н
нС	нС	Н
В	нС	нС
В	Н	С
Н	В	вС
нС	В	вС
вС	В	вС
В	В	В

Таблица 3

База знаний для зависимости (15)

x_1	x_2	y
Н	В	Н
нС	В	Н
нС	нС	Н
В	вС	Н
Н	нС	Н
В	вС	нС
В	Н	нС
Н	Н	С
вС	Н	С
вС	нС	С
вС	вС	С
вС	В	С
нС	Н	вС
нС	вС	вС
В	нС	В
В	В	В