ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК. ТЕОРИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ, 2001, № 3, с. 150–154

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

УДК 519.71

НЕЧЕТКИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ВАРИАНТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

© 2001 г. А. П. Ротштейн, С. Д. Штовба

Израиль, Тель-Авив, Холонский центр технологического обучения при Тель-Авивском университете

Украина, Винница, Винницкий государственный технический университет

Поступила в редакцию 31.01.00 г., после доработки – 13.03.00 г.

В работе предлагается методика ранжирования вариантов на основе лингвистических оценок частных критериев. Ранги частных критериев, а также функции принадлежности качественных оценок каждого варианта находятся на основе парных сравнений по шкале Саати. Выбор наилучшего варианта осуществляется по принципу Беллмана-Заде. Теоретические положения методики иллюстрируются на примере сравнения технико-экономического уровня инновационных проектов.

Введение. Анализ вариантов по многим критериям – это важная задача принятия решений, которая возникает не только в технике, но и в экономике, образовании, политике и т.д. Известные методики многокритериального анализа, которые используются в технических системах [1], предусматривают преобразование вектора частных критериев, которыми оценивается система, к скалярному интегральному критерию. Существенное ограничение такого подхода состоит в том, что он плохо приспособлен к качественным критериям, которые оцениваются экспертными методами.

Одним из возможных путей формализации экспертных оценок критериев может служить теория нечетких множеств. В этом случае интегральный критерий рассматривается как нечеткая свертка частных критериев [2]. Ограничением этого подхода является то, что иногда эксперту трудно даже на качественном уровне оценить значение некоторого частного критерия. Следует заметить, что в этом случае эксперту легче определить лучший из двух вариантов, т.е. провести парные сравнения.

Методика многокритериального анализа вариантов, которая предлагается в этой работе, не требует ни количественной оценки частных критериев, ни процедуры скаляризации. Она использует доступную лингвистическую информацию о качестве вариантов в виде парных сравнений типа:

по критерию A вариант 1 приблизительно такой же, как вариант 2,

по критерию B вариант 1 намного лучше, чем вариант 2 и т.п.

1. Постановка задачи. Будем считать известными: $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ – множество вариантов (аналогов), которые подлежат многокритериальному анализу; $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ – множество количественных и качественных критериев, которыми оцениваются варианты. Задача состоит в том, чтобы упорядочить элементы множества S по критериям из множества C.

Для решения этой задачи предлагается использование следующих принципов.

Принцип 1: рассмотрение критериев как нечетких множеств, которые заданы на универсальных множествах вариантов с помощью функции принадлежности.

Принцип 2: определение функций принадлежности нечетких множеств на основе экспертной информации о парных сравнениях вариантов с помощью 9-бальной шкалы Саати.

Принцип 3: ранжирование вариантов на основе пересечения нечетких множеств-критериев, которые отвечают известной в теории принятия решений схеме Беллмана-Заде.

Принцип 4: ранжирование критериев методом парных сравнений и учет полученных рангов как степеней концентрации соответствующих функции принадлежности.

2. Критерии как нечеткие множества. Пусть $\mu^l(s_i)$ – число в диапазоне [0, 1], которое характеризирует уровень оценки варианта $s_i \in S$ по критерию $c_l \in C$: чем больше число $\mu^l(x_i)$, тем выше оценка варианта по критерию $c_l \in C$, $i = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$. Тогда критерий $c_l \in C$ можно представить в виде нечеткого множества $\tilde{c}_l$, которое задано на универсальном множестве S таким образом

$$\tilde{c}_l = \left\{\frac{\mu^l(s_1)}{s_1}, \frac{\mu^l(s_2)}{s_2}, \ldots, \frac{\mu^l(s_n)}{s_n}\right\}, \qquad (2.1)$$

где $\mu^l(s_i)$ – степень принадлежности элемента s_i к нечеткому множеству $\tilde{c}_l$.

Чтобы определить степени принадлежности, которые входят в (2.1), сформируем матрицы парных сравнений вариантов по каждому критерию. Общее количество таких матриц совпадает с количеством критериев и равняется m.

Для критерия $c_l \in C$ матрица парных сравнений имеет вид

$$A(c_l) = \begin{array}{c} \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11}^l & a_{12}^l & \dots & a_{2n}^l \\ a_{21}^l & a_{22}^l & \dots & a_{2n}^l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^l & a_{n2}^l & \dots & a_{nn}^l \end{bmatrix} \end{array}, \qquad (2.2)$$

где элемент a_{ij}^l оценивается экспертом по 9-бальной шкалой Саати [3]: 1 – если отсутствует преимущество варианта s_i над вариантом s_j; 3 – если имеется слабое преимущество s_i над s_j; 5 – если имеется существенное преимущество s_i над s_j; 7 – если имеется явное преимущество s_i над s_j; 9 – если имеется абсолютное преимущество s_i над s_j; 2, 4, 6, 8 – промежуточные сравнительные оценки.

Знание матрицы (2.2) позволяет с использованием метода Саати проранжировать каждый вариант $s_i \in S$ по каждому критерию $c_l \in C$. Для вычисления рангов в соответствии с методикой, впервые предложенной в [3] и далее развивающейся в [4], необходимо найти собственный вектор матрицы (2.2). В первом приближении можно предположить, что парные сравнения согласованы, т.е. матрица (2.2) имеет такие свойства:

она диагональная, т.е. $a_{ii}^l = 1$, $i = \overline{1, n}$;

она обратно симметрична, т.е. элементы, симметричные относительно главной диагонали, связаны зависимостью

$$a_{ij}^l = 1/a_{ji}^l;$$

она транзитивна, т.е. $a_{ik}^l a_{kj}^l = a_{ij}^l$.

Наличие этих свойств позволяет определить все элементы матрицы (2.2), если известны $n - 1$ недиагональных элементов. Например, если известна k-тая строка, т.е. элементы a_{kj}^l ($j = \overline{1, n}$), то произвольный элемент a_{ij}^l определяется так:

$$a_{ij}^l = \frac{a_{kj}^l}{a_{ki}^l}, \quad i, j, k = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}.$$

После определения всех элементов матрицы (2.2) степени принадлежности, необходимые для формирования нечеткого множества (2.1), вычисляются по формуле [5]

$$\mu^l(s_i) = \frac{1}{a_{1i}^l + a_{2i}^l + \dots + a_{ni}^l}. \qquad (2.3)$$

Формула (2.3) в отличие от метода Саати не требует выполнения трудоемких вычислительных процедур, связанных с нахождением собственного вектора матрицы (2.2). Однако она может быть применена только при согласованных парных сравнениях. В случае отсутствия у матрицы парных сравнений свойств обратной симметричности и транзитивности определение рангов элементов производится согласно методу анализа иерархий [4].

3. Равновесные критерии. Базируясь на принципе Беллмана-Заде [6], наилучшим вариантом будем считать тот, который одновременно лучший по критериям $c_1, c_2, \dots, c_m$. Поэтому нечеткое множество $\tilde{D}$, которое необходимо для рейтингового анализа, определяется в виде пересечения (интегральный критерий оценки варианта)

$$\tilde{D} = \tilde{c}_1 \cap \tilde{c}_2 \cap \dots \cap \tilde{c}_m.$$

Учитывая то, что в теории нечетких множеств операции пересечения соответствует min, получаем

$$\tilde{D} = \left\{ \frac{\min\limits_{l=\overline{1, m}}\left[\mu^l(s_1)\right]}{s_1}, \frac{\min\limits_{l=\overline{1, m}}\left[\mu^l(s_2)\right]}{s_2}, \dots, \frac{\min\limits_{l=\overline{1, m}}\left[\mu^l(s_n)\right]}{s_n} \right\}. \qquad (3.1)$$

Анализируя полученное нечеткое множество D, приходим к выводу, что наилучшим вариантом следует считать тот, для которого степень принадлежности (числитель) является наибольшей.

4. Неравновесные критерии. Пусть $w_1, w_2, \dots, w_m$ – коэффициенты относительной важности (или ранги) критериев $c_1, c_2, \dots, c_m$, такие, что $w_1 + w_2 + \dots + w_m = 1$. Для определения коэффициентов w_l, $l = \overline{1, m}$, необходимо сформировать матрицу парных сравнений важности критериев $c_l \in C$, аналогичную (2.2), и воспользоваться формулой (2.3).

Методика принятия решения с учетом коэффициентов важности должна обеспечивать увеличение различия между вариантами по наиболее важным критериям и соответственно уменьшение различия по наименее важным. Для учета коэффициентов важности воспользуемся идеей, заложенной в операции концентрации и растяжения нечетких множеств [7]. Суть этих операций состоит в преобразовании нечеткого множества путем возведения функции принадлежности в положительную степень – в степень 2 при концентрации, и в 1/2 – при растяжении. В общем случае, чем больше показатель степени, тем в большей мере увеличивается отличие между элементами нечеткого множества, т.е. нечеткое множество становится более концентрированным. С учетом этого формула (3.1) принимает вид

$$\tilde{D} = \left\{ \frac{\min\limits_{l=\overline{1,m}} \left[\mu^l(s_1) \right]^w}{s_1}, \frac{\min\limits_{l=\overline{1,m}} \left[\mu^l(s_2) \right]^w}{s_2}, \ldots, \frac{\min\limits_{l=\overline{1,m}} \left[\mu^l(s_n) \right]^w}{s_n} \right\}, \tag{4.1}$$

где степень w_l свидетельствует о концентрации нечеткого множества $\tilde{c}_l$ в соответствии с мерой важности критерия $c_l \in C$.

5. Пример многокритериального анализа. В качестве примера, иллюстрирующего применение предложенной методики, рассмотрим сравнение технико-экономического уровня трех проектов (s_1, s_2, s_3), направленных в инновационный фонд с целью получения финансирования.

5.1. Критерии оценки вариантов. Для оценки технико-экономического уровня проектов воспользуемся такими критериями: c_1 – масштаб проекта; c_2 – новизна проекта; c_3 – приоритетность направления; c_4 – степень проработки; c_5 – правовая защищенность; c_6 – экологический уровень.

5.2. Парные сравнения. При сравнении проектов s_1, s_2, s_3 по критериям c_1–c_6 были получены лингвистические высказывания, показанные в таблице.

Парные сравнения проектов

Критерий	Парные сравнения
c_1	Отсутствие преимущества s_1 над s_2
	Существенное преимущество s_3 над s_1
c_2	Почти существенное преимущество s_1 над s_3
	Слабое преимущество s_2 над s_3
c_3	Существенное преимущество s_1 над s_2
	Явное преимущество s_1 над s_3
c_4	Слабое преимущество s_2 над s_1
	Почти слабое преимущество s_3 над s_1
c_5	Существенное преимущество s_1 над s_2
	Почти явное преимущество s_1 над s_3
c_6	Почти существенное преимущество s_1 над s_2
	Почти слабое преимущество s_3 над s_1

5.3. Матрицы парных сравнений. Экспертным высказываниям, приведенным в таблице, соответствуют такие матрицы парных сравнений:

$$A(c_1) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{1} & 0.2 \\ 1 & 1 & 0.2 \\ \mathbf{5} & 5 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A(c_2) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1.33 & \mathbf{4} \\ 0.75 & 1 & \mathbf{3} \\ 0.25 & 0.33 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A(c_3) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ 0.2 & 1 & 1.4 \\ 0.14 & 0.71 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A(c_4) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0.33 & 0.5 \\ \mathbf{3} & 1 & 1.5 \\ \mathbf{2} & 0.67 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A(c_5) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 0.2 & 1 & 1.2 \\ 0.17 & 0.83 & 1 \end{bmatrix} \end{array};$$

$$A(c_6) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{4} & 0.5 \\ 0.25 & 1 & 0.13 \\ \mathbf{2} & 8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

В этих матрицах полужирным шрифтом выделены элементы, которые соответствуют парным сравнениям, приведенным в таблице. Остальные элементы найдены с учетом того, что матрица парных сравнений является диагональной и обладает указанными в разд. 2 свойствами транзитивности и обратной симметричности.

5.4. Критерии как нечеткие множества. Пользуясь матрицами парных сравнений и формулой (2.3), получим

$$\tilde{c}_1 = \left\{\frac{0.14}{s_1}, \frac{0.14}{s_2}, \frac{0.72}{s_3}\right\}, \quad \tilde{c}_2 = \left\{\frac{0.5}{s_1}, \frac{0.38}{s_2}, \frac{0.12}{s_3}\right\},$$

$$\tilde{c}_3 = \left\{\frac{0.74}{s_1}, \frac{0.15}{s_2}, \frac{0.11}{s_3}\right\}, \quad \tilde{c}_4 = \left\{\frac{0.17}{s_1}, \frac{0.5}{s_2}, \frac{0.33}{s_3}\right\},$$

$$\tilde{c}_5 = \left\{\frac{0.73}{s_1}, \frac{0.15}{s_2}, \frac{0.12}{s_3}\right\}, \quad \tilde{c}_6 = \left\{\frac{0.31}{s_1}, \frac{0.08}{s_2}, \frac{0.61}{s_3}\right\}.$$

5.5. Случай равновесных критериев. Пользуясь нечеткими множествами c_1–c_6 и моделью (3.1), получим

$$\tilde{D} = \left\{\frac{0.14}{s_1}, \frac{0.08}{s_2}, \frac{0.11}{s_3}\right\},$$

что свидетельствует о существенном преимуществе проекта s_1 над проектом s_2, а также о слабом преимуществе проекта s_1 над проектом s_3.

5.6. Случай неравновесных критериев. Ранги выбранных критериев c_1–c_6 определим с помощью следующих лингвистических высказываний:

почти существенное преимущество c_2 над c_1;

явное преимущество c_3 над c_1;

слабое преимущество c_3 над c_5;

почти слабое преимущество c_4 над c_6;

отсутствие преимущества c_5 над c_6.

Этим экспертным высказываниям соответствует следующая матрица парных сравнений:

$$W = \begin{array}{c} \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.14 & 0.21 & 0.43 & 0.43 \\ \mathbf{4} & 1 & 0.57 & 0.86 & 1.71 & 1.71 \\ \mathbf{7} & 1.75 & 1 & 1.5 & \mathbf{3} & 3 \\ 4.67 & 1.17 & 0.67 & 1 & 2 & \mathbf{2} \\ 2.33 & 0.58 & 0.33 & 0.5 & 1 & \mathbf{1} \\ 2.33 & 0.58 & 0.33 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Применяя формулу (2.3), определим ранги критериев c_1–c_6

$$w_1 = 0.04; \quad w_2 = 0.19;$$

$$w_3 = 0.33; \quad w_4 = 0.22;$$

$$w_5 = 0.11; \quad w_6 = 0.11,$$

что означает наибольшую важность приоритетности направления (c_3) и степени проработки проекта (c_4). Тогда, согласно (4.1), получаем

$$\tilde{c}_1 = \left\{\frac{0.14^{0.04}}{s_1}, \frac{0.14^{0.04}}{s_2}, \frac{0.72^{0.04}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.91}{s_1}, \frac{0.91}{s_2}, \frac{0.98}{s_3}\right\};$$

$$\tilde{c}_2 = \left\{\frac{0.5^{0.19}}{s_1}, \frac{0.38^{0.19}}{s_2}, \frac{0.12^{0.19}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.88}{s_1}, \frac{0.83}{s_2}, \frac{0.68}{s_3}\right\};$$

$$\tilde{c}_3 = \left\{\frac{0.74^{0.33}}{s_1}, \frac{0.15^{0.33}}{s_2}, \frac{0.11^{0.33}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.91}{s_1}, \frac{0.53}{s_2}, \frac{0.48}{s_3}\right\};$$

$$\tilde{c}_4 = \left\{\frac{0.17^{0.22}}{s_1}, \frac{0.5^{0.22}}{s_2}, \frac{0.33^{0.22}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.68}{s_1}, \frac{0.86}{s_2}, \frac{0.79}{s_3}\right\};$$

$$\tilde{c}_5 = \left\{\frac{0.73^{0.11}}{s_1}, \frac{0.15^{0.11}}{s_2}, \frac{0.12^{0.11}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.97}{s_1}, \frac{0.81}{s_2}, \frac{0.79}{s_3}\right\};$$

$$\tilde{c}_6 = \left\{\frac{0.31^{0.11}}{s_1}, \frac{0.08^{0.11}}{s_2}, \frac{0.61^{0.11}}{s_3}\right\} = \left\{\frac{0.88}{s_1}, \frac{0.76}{s_2}, \frac{0.95}{s_3}\right\}.$$

После выполнения операции пересечения нечетких множеств c_1–c_6 получим

$$\tilde{D} = \left\{\frac{0.68}{s_1}, \frac{0.53}{s_2}, \frac{0.48}{s_3}\right\},$$

что свидетельствует о существенном преимуществе проекта s_1 над проектами s_2 и s_3, а также о наличии слабого преимуществе проекта s_2 над проектом s_3.

Заключение. Методика, предложенная в статье, позволяет проводить многокритериальный анализ вариантов на основе парных сравнений. Использование в качестве исходных данных не абсолютных значений критериев, а парных сравнений является более удобным для экспертов. Особенностью предложенной методики – применение принципа Беллмана-Заде, позволяющего выбрать вариант, который одновременно удовлетворяет всем критериям в наибольшей степени. Предложенная методика может использоваться для многокритериального анализа вариантов в задачах принятия решений в технике, экономике, политике, образовании, медицине и в других областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хубка В.* Теория технических систем. М.: Мир, 1987.
2. *Чернов В.Г.* Построение рейтинговых оценок с использованием нечетких множеств // Изв. РАН. ТиСУ. 1999. № 1.
3. *Саати Т.* Математические модели конфликтных ситуаций. М.: Сов. радио, 1977.
4. *Саати Т., Кернс К.* Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991.
5. *Rotshtein A.P.* Modification of Saaty Method for the Construction of Fuzzy Set Membership functions // Proc. of the Intern. Conf. «Fuzzy Logic and its Applications’, Zichron, Israei, 1997.
6. *Беллман Р., Заде Л.* Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. М.: Мир, 1976.
7. *Заде Л.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня: Сборник статей / Пер. с англ. М.: Знание, 1974.