

УДК 681.3

## НЕЧІТКІ МАТРИЧНІ МОДЕЛІ НАДІЙНОСТІ АЛГОРИТМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА СУМІСНИХ ПОМИЛОК

С.Д. Штовба

### Вступ

Розглядаються *алгоритмічні процеси* (АП), тобто розгорнута у часі послідовність дій, операцій або робіт, виконання яких забезпечує досягнення мети – отримання інформації, знань, документації, продукції тощо. Узагальненим показником надійності АП виступає ймовірність досягнення мети, яка для прикладних задач інтерпретується як безпомилковість, бездефектність, достовірність, своєчасність тощо [1]. Основою моделювання надійності АП є алгоритмічні структури у вигляді типових комбінацій основних та допоміжних операцій. Для алгоритмічних структур розроблені моделі розрахунку показників надійності за характеристиками безпомилкового виконання окремих операцій.

Значний вклад в теорію надійності АП внесли роботи наукової школи А. Губінського з надійності людино–машинних систем [1–4], І. Сафонова з оптимізації алгоритмів [5], Г. Дружиніна з надійності технологічних процесів [6], О. Ротштейна з надійності трудових процесів [7]. В більшості робіт моделювання та оптимізація надійності АП здійснюється за бінарною концепцією врахування помилок, де розрізняються лише 2 стани виконання АП: з помилками або без помилок. Між собою помилки не розрізняються, тобто не важливо, яка саме помилка зроблена. В багатьох реальних задачах використання бінарної концепції врахування помилок є недоцільним, оскільки для різних типів помилок різняться ймовірності їх внесення, виявлення та усунення, так само як і витрати на ці процедури.

Для врахування помилок різних типів О. Ротштейн в [7] запропонував компактні матричні моделі надійності операторів, логічних умов та алгоритмічних структур. Деякі з них в статті [8] узагальнено на випадок нечітких початкових даних. Узагальнення здійснено за методикою з [9]. Обмеження тих моделей надійності полягає в тому, що вони розроблені для випадку помилок несумісних типів, прикладом яких для операції складання механічного пристрою є такі результати: а) недокручена гайка та б) занадто затянута гайка. Прикладом сумісних помилок є підготовка документу з орфографічними, синтаксичними та стилістичними помилками. В окремому документі можуть зустрічатися як помилки лише одного типу, так і парні (наприклад, орфографічними та синтаксичні), і трійні. В статті [10] запропоновано ймовірнісні матричні моделі надійності операторів та логічних умов, які враховують можливість суміщення помилок різних типів під час виконання алгоритмічного процесу.

**Метою статті** є розробка нечітких матричних моделей надійності АП, які б враховували можливість появи сумісних помилок. Стаття організована таким чином: спочатку наводяться матричні моделі надійності для помилок несумісних типів з [7] та чіткі моделі надійності для сумісних помилок з [10]. Далі наведені моделі узагальнюються на випадок нечітких ймовірностей переходів між станами АП. Статтю завершує ілюстративний приклад з розрахунку нечіткої надійності АП з помилками функціонування сумісних типів.

### Матричні моделі надійності за чітких ймовірностей

Позначимо через  $m$  – кількість різних типів помилок функціонування АП. За несумісних помилок АП може перебувати в одному з таких станів [7]:  $1$  – помилки відсутні,  $0_1$  – наявна помилка лише 1-го типу,  $0_2$  – наявна помилка лише 2-го типу, ...,  $0_m$  – наявна помилка лише  $m$ -го типу. Відповідно, для опису характеристик надійності операторів та логічних умов достатньо матриці розміром  $(m+1) \times (m+1)$ , в якій кожен елемент задає ймовірність переходу між станами. Початковим станам відповідають стрічки матриці, а кінцевим – стовпці.

Матричні моделі надійності операторів та логічних умов зведено в табл. 1. В ній використовуються такі позначення елементів АП:

$A$  – робочий оператор, під час виконання якого помилки можуть бути внесені, але не виявлені і не усунені;

$R$  – оператор доробки, під час виконання якого усуваються раніше внесені помилки, при цьому не виключається поява нових помилок;

$U$  – оператор доробки, підчас виконання якого усуваються раніше внесені помилки, при цьому нові помилки не вносяться;

$Z$  – оператор оновлення, підчас якого замінюється предмет діяльності на новий;

$E$  – тотожний оператор, який не змінює стан системи;

$\omega$  – логічна умова, підчас виконання якої внесені помилки виявляються.

Таблиця 1. Матричні моделі надійності операторів та логічних умов

Елемент	Моделі за несумісних помилок [7]	Моделі за сумісних помилок [10]
$A$	$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} P_A^1 & P_A^{01} & \dots & P_A^{0m} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} P_A^1 & P_A^{01} & \dots & P_A^{0m} & 0 \\ 0 & P_A^1 + P_A^{01} & \dots & 0 & 1 - P_A^1 - P_A^{01} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & P_A^1 + P_A^{0m} & 1 - P_A^1 - P_A^{0m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$U$	$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ V_U^{11} & V_U^{01} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ V_U^{1m} & 0 & \dots & V_U^{0m} \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ V_U^{11} & V_U^{01} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ V_U^{1m} & 0 & \dots & V_U^{0m} & 0 \\ V_U^{1\&} & 0 & \dots & 0 & V_U^{0\&} \end{bmatrix}$
$R$	$\mathbf{P}_R = \begin{bmatrix} P_R^1 & P_R^{01} & \dots & P_R^{0m} \\ V_R^{11} & V_R^{01} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ V_R^{1m} & 0 & \dots & V_R^{0m} \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}_R = \begin{bmatrix} P_R^1 & P_R^{01} & \dots & P_R^{0m} & 0 \\ V_R^{11} & V_R^{01} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ V_R^{1m} & 0 & \dots & V_R^{0m} & 0 \\ V_R^{1\&} & 0 & \dots & 0 & V_R^{0\&} \end{bmatrix}$
$Z$	$\mathbf{P}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$E$	$\mathbf{P}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{P}_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\omega$	$\mathbf{K}_\omega = \begin{bmatrix} k_\omega^{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_\omega^{01_1} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & k_\omega^{01_m} \end{bmatrix}$	$\mathbf{K}_\omega = \begin{bmatrix} k_\omega^{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_\omega^{01_1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & k_\omega^{01_m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_\omega^{01\&} \end{bmatrix}$

В табл. 1 ймовірності подій позначено таким чином:

$P_A^1$  – ймовірність безпомилкового виконання оператора  $A$  ;

$P_A^{0j}$  – ймовірність внесення помилки  $j$ -го типу оператором  $A$  ,  $j = \overline{1, m}$  ;

$V_U^{1j} (V_U^{0j})$  – ймовірність усунення (не усунення) помилки  $j$ -го типу доробкою  $U$  ;

$V_R^{1j} (V_R^{0j})$  – ймовірність усунення (не усунення) помилки  $j$ -го типу доробкою  $R$  ;

$P_R^1$  – ймовірність невнесення помилок підчас доробки  $R$  ;

$P_R^{0j}$  – ймовірність внесення помилки  $j$ -го типу підчас доробки  $R$  ;

$k_\omega^{11} (k_\omega^{10})$  – ймовірність того, що відсутність помилок контролем  $\omega$  ідентифіковано правильно (неправильно);

$k_\omega^{01j} (k_\omega^{00j})$  – ймовірність пропуску (виявлення) помилки  $j$ -го типу контролем  $\omega$  .

За умови, що усі  $m$  типів помилок є сумісними, кількість можливих станів АП дорівнюватиме  $2^m$  . Звідси, розмір матриці переходів становитиме  $2^m \times 2^m$  , що призводить до великого об'єму початкових даних. З практичної точки зору доцільно ввести такі обмеження, щоб забезпечити добрий баланс між складністю моделей надійності та їх адекватністю [10]:

*По-перше*, вважатимемо потік помилок при виконанні одного оператора ординарним, що означає неможливість одночасного внесення двох і більше помилок. Звідси, переходи на парні помилки можливі лише з однократних, а на трійні помилки – лише з парних тощо.

*По-друге*, вважатимемо неможливим перехід з одного типу помилок на інші [7]. Звідси слідує неможливість переходу між однократними помилками, між парними помилками тощо.

*По-третьє*, вважатимемо, що підчас виконанні робочого оператора помилки лише вносяться, та не виявляються і не усуваються [7]. Відповідно, неможливо перейти з помилок більшої кратності на меншу.

*По-четверте*, вважатимемо процес внесення помилок однорідним, в якому ймовірності внесення помилок не залежать від наявності або відсутності попередніх помилок.

*По-п'яте*, усі стани з парними, трійними та іншими багатократними помилками об'єднані в один стан " $0_\&$ ".

За цих умов матриця переходів будь-якого оператора матиме розмір  $(m+2) \times (m+2)$  . В ній перші рядок та стовпець відповідатимуть стану без помилок, останні рядок та стовпець – стану з кратними помилками, а решта пар рядок–стовпець – однократним помилкам. Причому усі ймовірності переходів можна виразити через ймовірність безпомилковості та ймовірності внесення однократних помилок. Наприклад, матриця переходів для робочого оператора  $A$  за сумісних помилок трьох типів буде такою:

$$P_A = \begin{bmatrix} 1 & 0_1 & 0_2 & 0_3 & 0_\& \\ P_A^1 & P_A^{01} & P_A^{02} & P_A^{03} & 0 \\ 0 & P_A^1 + P^{01} & 0 & 0 & 1 - P_A^1 - P_A^{01} \\ 0 & 0 & P_A^1 + P^{02} & 0 & 1 - P_A^1 - P_A^{02} \\ 0 & 0 & 0 & P_A^1 + P^{03} & 1 - P_A^1 - P_A^{03} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 0_1 \\ 0_2 \\ 0_3 \\ 0_\& \end{matrix} .$$

З цього прикладу видно, що ймовірність переходу  $0_j \rightarrow 0_j$  дорівнює  $P^1 + P^{0j}$  , а ймовірність переходу  $0_j \rightarrow 0_\&$  дорівнює  $1 - P^1 - P^{0j}$  ,  $j = \overline{1, m}$  .

Матриці переходів операторів та логічної умови за помилок сумісних типів наведено в табл. 1. Моделі надійності типових алгоритмічних структур зведено в табл. 2. Вони придатні для аналізу надійності як за несумісних, так і за сумісних помилок функціонування АП. В табл. 2 використовуються такі нові позначення:

$p_\Psi$  – частка контролю, яка задає ймовірність істинності логічної умови  $\Psi$  ;

$\mathbf{P}$  – матриця переходів еквівалентного робочого оператора;  $\mathbf{I}$  – одинична матриця.

Таблиця 2. Моделі надійності алгоритмічних структур [7]

Структура (на мові алгоритмічних алгебр)	Схема	Моделі надійності
$A_1 A_2$		$P = P_{A_1} P_{A_2}$
$A^N$		$P = P_A^N$
$[A_1, A_2]$		$P = P_{A_1} P_{A_2}$
$(A_1 \vee A_2)_{\omega}$		$P = P_{\omega} \cdot (K_{\omega} P_{A_1} + (I - K_{\omega}) P_{A_2})$
$A(E \vee U)_{\omega}$		$P = P_A K_{\omega} + P_A \cdot (I - K_{\omega}) P_U$
$A(E \vee R)_{\omega}$		$P = P_A K_{\omega} + P_A \cdot (I - K_{\omega}) P_R$
$A(E \vee (E \vee U))_{\psi}$		$P = (1 - p_{\psi}) P_A + p_{\psi} \cdot (P_A K_{\omega} + P_A \cdot (I - K_{\omega}) P_U)$
$A(E \vee (E \vee R))_{\psi}$		$P = (1 - p_{\psi}) P_A + p_{\psi} \cdot (P_A K_{\omega} + P_A \cdot (I - K_{\omega}) P_R)$
$\{ZA\}_{\omega}$		$P = P_Z P_A K_{\omega} \cdot (I - P_Z P_A \cdot (I - K_{\omega}))^{-1}$
$A\{E \vee U\}_{\omega}$		$P = P_A K_{\omega} \cdot (I - (I - K_{\omega}) P_U)^{-1}$
$A\{E \vee R\}_{\omega}$		$P = P_A K_{\omega} \cdot (I - (I - K_{\omega}) P_R)^{-1}$

### Нечіткі початкові дані

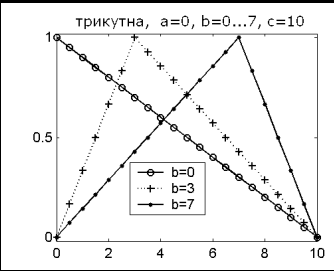
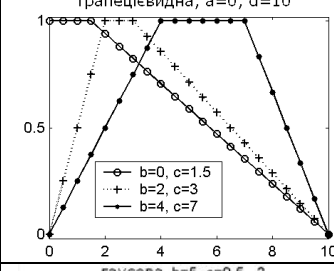
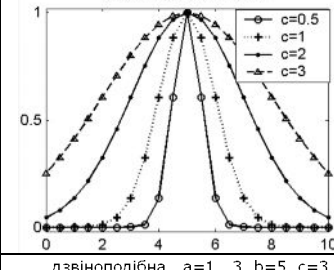
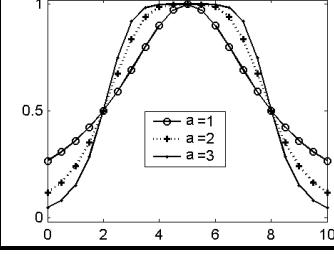
Вважатимемо, що характеристики надійності операторів та логічних умов задані нечіткими числами  $\alpha$ -формі:

$$\tilde{y} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\underline{y}_\alpha, \bar{y}_\alpha),$$

де  $\underline{y}_\alpha$  та  $\bar{y}_\alpha$  – найменше та найбільше значення  $\alpha$ -зрізу нечіткого числа  $\tilde{y}$ .

Правила перетворення популярних параметричних функцій належності в  $\alpha$ -зрізи нечіткого числа зведені в табл. 3.

Таблиця 3. Параметричні функції належності

Функція належності	Аналітичний вираз [9, 11]	Перехід до $\alpha$ -форми
 <p>трикутна, <math>a=0, b=0\dots7, c=10</math></p>	$\mu(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < a \\ \frac{y-a}{b-a}, & \text{якщо } a \leq y < b \\ \frac{c-y}{c-b}, & \text{якщо } b \leq y \leq c \\ 0, & \text{якщо } y > c \end{cases}$	$\underline{y}_\alpha = a + (b-a) \cdot \alpha$ $\bar{y}_\alpha = c - (c-b) \cdot \alpha$
 <p>трапецієвидна, <math>a=0, d=10</math></p>	$\mu(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y < a \\ \frac{y-a}{b-a}, & \text{якщо } a \leq y < b \\ 1, & \text{якщо } b \leq y < c \\ \frac{d-y}{d-c}, & \text{якщо } c \leq y \leq d \\ 0, & \text{якщо } y > d \end{cases}$	$\underline{y}_\alpha = a + (b-a) \cdot \alpha$ $\bar{y}_\alpha = d - (d-c) \cdot \alpha$
 <p>гаусова, <math>b=5, c=0.5\dots3</math></p>	$\mu(y) = \exp\left(-\frac{(y-b)^2}{2c^2}\right)$	$\underline{y}_\alpha = b - c \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ $\bar{y}_\alpha = b + c \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$
 <p>дзвіноподібна, <math>a=1\dots3, b=5, c=3</math></p>	$\mu(y) = \frac{1}{1 + \left \frac{y-b}{c}\right ^{2a}}$	$\underline{y}_\alpha = c - b \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/2a}$ $\bar{y}_\alpha = c + b \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{1/2a}$

### Нечіткі моделі надійності операторів та логічних умов

Нечіткі характеристики операторів та логічних умов задамо матрицями песимістичних та оптимістичних оцінок безпомилковості (табл. 4). Кожен елемент цих матриць є масивом нижніх або верхніх границь  $\alpha$ -зрізів нечіткої ймовірності відповідного переходу між станами. Масиви нижніх границь позначені символом “ $\underline{\quad}$ ”, а верхніх – символом “ $\bar{\quad}$ ”. Для виконання правила стохастичності сума елементів кожної стрічки матриць з табл. 4 має дорівнювати одиничному масиву  $(1, 1, \dots, 1)^T$ , розмір якого відповідає кількості  $\alpha$ -зрізів нечітких чисел.

Таблиця 4. Нечіткі моделі надійності операторів та логічної умови

Песимістичні оцінки безпомилковості	Оптимістичні оцінки безпомилковості
$\mathbf{P}_A = \begin{bmatrix} P_A^1 & \bar{P}_A^{01} & \dots & \bar{P}_A^{0m} & 0 \\ 0 & P_A^1 + \bar{P}_A^{01} & \dots & 0 & 1 - P_A^1 - \bar{P}_A^{01} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & P_A^1 + \bar{P}_A^{0m} & 1 - P_A^1 - \bar{P}_A^{0m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\bar{\mathbf{P}}_A = \begin{bmatrix} \bar{P}_A^1 & P_A^{01} & \dots & P_A^{0m} & 0 \\ 0 & \bar{P}_A^1 + P_A^{01} & \dots & 0 & 1 - \bar{P}_A^1 - P_A^{01} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{P}_A^1 + P_A^{0m} & 1 - \bar{P}_A^1 - P_A^{0m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{P}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \underline{V}_U^1 & \bar{V}_U^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \underline{V}_U^m & 0 & \dots & \bar{V}_U^0 & 0 \\ \underline{V}_U^{1\&} & 0 & \dots & 0 & \bar{V}_U^{0\&} \end{bmatrix}$	$\bar{\mathbf{P}}_U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \bar{V}_U^1 & \underline{V}_U^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \bar{V}_U^m & 0 & \dots & \underline{V}_U^0 & 0 \\ \bar{V}_U^{1\&} & 0 & \dots & 0 & \underline{V}_U^{0\&} \end{bmatrix}$
$\mathbf{P}_R = \begin{bmatrix} P_R^1 & \bar{P}_R^{01} & \dots & \bar{P}_R^{0m} & 0 \\ \underline{V}_R^1 & \bar{V}_R^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \underline{V}_R^m & 0 & \dots & \bar{V}_R^0 & 0 \\ \underline{V}_R^{1\&} & 0 & \dots & 0 & \bar{V}_R^{0\&} \end{bmatrix}$	$\bar{\mathbf{P}}_R = \begin{bmatrix} \bar{P}_R^1 & P_R^{01} & \dots & P_R^{0m} & 0 \\ \bar{V}_R^1 & \underline{V}_R^0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \bar{V}_R^m & 0 & \dots & \underline{V}_R^0 & 0 \\ \bar{V}_R^{1\&} & 0 & \dots & 0 & \underline{V}_R^{0\&} \end{bmatrix}$
$\mathbf{K}_\omega = \begin{bmatrix} k_\omega^{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_\omega^{011} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \bar{k}_\omega^{01m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{k}_\omega^{01\&} \end{bmatrix}$	$\bar{\mathbf{K}}_\omega = \begin{bmatrix} \bar{k}_\omega^{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_\omega^{011} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & k_\omega^{01m} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & k_\omega^{01\&} \end{bmatrix}$

**Приклад 1.** Нехай існує 2 типи помилок ( $m = 2$ ), ймовірності внесення яких задано нечіткими числами  $\tilde{P}_A^{01}$  та  $\tilde{P}_A^{02}$  з трикутною функцією належності з параметрами ( $a=0.01, b=0.01, c=0.03$ ) та ( $a=0, b=0.04, c=0.06$ ). За несумісних помилок нечіткі характеристики робочого оператора  $A$  задамо такими матрицями песимістичних та оптимістичних оцінок безпомилковості:

$$\mathbf{P}_A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.95 & 0.01 & 0.04 \\ \hline 0.93 & 0.02 & 0.05 \\ \hline 0.91 & 0.03 & 0.06 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \end{array} ; \quad \bar{\mathbf{P}}_A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0.95 & 0.01 & 0.04 \\ \hline 0.97 & 0.01 & 0.02 \\ \hline 0.99 & 0.01 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \end{array}$$

Елементи матриць  $\mathbf{P}_A$  та  $\bar{\mathbf{P}}_A$  виділено штриховим контуром. Всередині кожного контуру розміщено масив границь  $\alpha$ -зрізів нечітких чисел.  $\alpha$ -зрізи нечітких чисел розраховані підстановкою

параметрів  $(a, b, c)$  трикутної функції належності в формули з табл. 3. Використовуються 3  $\alpha$ -рівні: 0, 0.5 та 1.

За сумісних помилок нечіткі характеристики робочого оператора  $A$  будуть такими:

$$\mathbf{P}_A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.95 & 0.01 & 0.04 & 0 \\ \hline 0.93 & 0.02 & 0.05 & 0 \\ \hline 0.91 & 0.03 & 0.06 & 0 \\ \hline 0 & 0.96 & 0 & 0.04 \\ \hline 0 & 0.95 & 0 & 0.05 \\ \hline 0 & 0.94 & 0 & 0.06 \\ \hline 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ \hline 0 & 0 & 0.98 & 0.02 \\ \hline 0 & 0 & 0.97 & 0.03 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \end{array} ; \quad \bar{\mathbf{P}}_A = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0.95 & 0.01 & 0.04 & 0 \\ \hline 0.97 & 0.01 & 0.02 & 0 \\ \hline 0.99 & 0.01 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0.96 & 0 & 0.04 \\ \hline 0 & 0.98 & 0 & 0.02 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ \hline 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ \hline 0 & 0 & 0.99 & 0.01 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \\ \leftarrow \alpha = 1 \\ \leftarrow \alpha = 0.5 \\ \leftarrow \alpha = 0 \end{array}$$

### Нечіткі моделі надійності алгоритмічних структур

Розробляти нечіткі матричні моделі безпомилковості алгоритмічних структур будемо за  $\alpha$ -рівневим принципом узагальнення [9, 11]. Аналіз нечітких бінарних моделей надійності з [9, 12] та нечітких багатоарних моделей надійності з [8] показав, що при розрахунку нижніх границь  $\alpha$ -зрізів безпомилковості використовуються елементи матриць  $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_U, \mathbf{P}_R, \mathbf{K}_\omega$ , тобто песимістичні оцінки безпомилковості операторів та логічних умов. Відповідно при розрахунку верхніх границь  $\alpha$ -зрізів безпомилковості алгоритмічних структур використовуються елементи матриць  $\bar{\mathbf{P}}_A, \bar{\mathbf{P}}_U, \bar{\mathbf{P}}_R, \bar{\mathbf{K}}_\omega$ , тобто оптимістичні оцінки безпомилковості. Таким чином, нечіткі моделі безпомилковості синтезуємо з чітких (табл. 2) заміною матриць  $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_U, \mathbf{P}_R, \mathbf{K}_\omega$  на:

$\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_U, \mathbf{P}_R, \mathbf{K}_\omega$  при розрахунку нижніх границь  $\alpha$ -зрізів;

$\bar{\mathbf{P}}_A, \bar{\mathbf{P}}_U, \bar{\mathbf{P}}_R, \bar{\mathbf{K}}_\omega$  при розрахунку верхніх границь  $\alpha$ -зрізів.

Операції на матрицях виконуємо за правилами лінійної алгебри, тобто “множимо рядок на стовпець”. Кожний матричний елемент задано масивом границь  $\alpha$ -зрізів нечітких чисел. Операції над цими масивами виконуємо за принципом “чарунка на чарунку”. Нечіткі моделі надійності алгоритмічних структур зведено в табл. 5. Вони придатні для аналізу надійності як за несумісних, так і за сумісних помилок. В табл. 5 застосовуються такі нові позначення:

$\mathbf{E}(\bar{\mathbf{F}})$  – матриця, кожен елемент якої є масивом нижніх (верхніх) границь  $\alpha$ -зрізів нечіткого числа  $\bar{p}_\psi$ . Розмір матриць  $\mathbf{E}$  та  $\bar{\mathbf{F}}$  такий же, як і решти матриць;

$\otimes$  – операція поелементного множення матриць за схемою “чарунка на чарунку”;

$\min(\max)$  – операція мінімуму (максимуму) над матричними елементами з однаковими індексами.

Після укрупнення структур з контролем в матриці безпомилковості еквівалентного робочого оператора зникають нулі. Замість них з'являються ймовірності, які віддзеркалюють можливість контролю з доробкою (або контролю з оновленням) виявляти та усувати помилки, які внесені попередніми операторами. Таким чином розрахункові формули відповідають схемі контролю з перевіркою усіх операцій, що йому передують. Якщо при контролі перевіряється лише одна операція, тоді матрицю нечіткої безпомилковості еквівалентного робочого приведемо до формату з табл. 1 зануливши відповідні елементи.

Таблиця 5. Нечіткі моделі надійності алгоритмічних структур

Структура	Моделі надійності
$A_1 A_2$	$\underline{P} = \underline{P}_{A_1} \underline{P}_{A_2} \quad \bar{P} = \bar{P}_{A_1} \bar{P}_{A_2}$
$A^N$	$\underline{P} = (\underline{P}_A)^N \quad \bar{P} = (\bar{P}_A)^N$
$[A_1, A_2]$	$\underline{P} = \underline{P}_{A_1} \underline{P}_{A_2} \quad \bar{P} = \bar{P}_{A_1} \bar{P}_{A_2}$
$(A_1 \vee A_2)_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_\omega \cdot (\underline{K}_\omega \underline{P}_{A_1} + (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_{A_2}) \quad \bar{P} = \bar{P}_\omega \cdot (\bar{K}_\omega \bar{P}_{A_1} + (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_{A_2})$
$A(E \vee U)_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_A \underline{K}_\omega + \underline{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_U \quad \bar{P} = \bar{P}_A \bar{K}_\omega + \bar{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_U$
$A(E \vee R)_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_A \underline{K}_\omega + \underline{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_R \quad \bar{P} = \bar{P}_A \bar{K}_\omega + \bar{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_R$
$A(E \vee (E \vee U))_\psi$	$\underline{P} = (1 - \mathbf{F}) \otimes \underline{P}_A + \mathbf{F} \otimes (\underline{P}_A \underline{K}_\omega + \underline{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_U)$ $\bar{P} = (1 - \bar{\mathbf{F}}) \otimes \bar{P}_A + \bar{\mathbf{F}} \otimes (\bar{P}_A \bar{K}_\omega + \bar{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_U)$
$A(E \vee (E \vee R))_\psi$	$\underline{P} = \min \left\{ (1 - \mathbf{F}) \otimes \underline{P}_A + \mathbf{F} \otimes (\underline{P}_A \underline{K}_\omega + \underline{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_R) \right\}, \mathbf{F} \in \{\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}}\}$ $\bar{P} = \max \left\{ (1 - \mathbf{F}) \otimes \bar{P}_A + \mathbf{F} \otimes (\bar{P}_A \bar{K}_\omega + \bar{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_R) \right\}, \mathbf{F} \in \{\mathbf{F}, \bar{\mathbf{F}}\}$
$\{ZA\}_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_Z \underline{P}_A \underline{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - \underline{P}_Z \underline{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega))^{-1}$ $\bar{P} = \bar{P}_Z \bar{P}_A \bar{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - \bar{P}_Z \bar{P}_A \cdot (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega))^{-1}$
$A\{E \vee U\}_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_A \underline{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_U)^{-1} \quad \bar{P} = \bar{P}_A \bar{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_U)^{-1}$
$A\{E \vee R\}_\omega$	$\underline{P} = \underline{P}_A \underline{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \underline{K}_\omega) \underline{P}_R)^{-1} \quad \bar{P} = \bar{P}_A \bar{K}_\omega \cdot (\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \bar{K}_\omega) \bar{P}_R)^{-1}$

**Приклад 2.** Під час виконання операторів  $A_1$  та  $A_2$  можуть бути внесені помилки двох сумісних типів. Нечіткі ймовірнісні характеристики операторів  $A_1$  та  $A_2$  є такими:

$$\underline{P}_{A_1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 & 0 \\ 0.75 & 0.1 & 0.15 & 0 \\ 0.7 & 0.15 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.85 & 0.15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{P}_{A_1} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.05 & 0.15 & 0 \\ 0.9 & 0.03 & 0.07 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0.15 \\ 0 & 0.93 & 0 & 0.07 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.95 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.97 & 0.03 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$



$$\mathbf{P}_{A_2} = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.12 & 0.04 & 0 \\ 0.81 & 0.14 & 0.05 & 0 \\ 0.77 & 0.17 & 0.06 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.95 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.94 & 0 & 0.06 \\ 0 & 0 & 0.88 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.86 & 0.14 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{P}}_{A_2} = \begin{bmatrix} 0.84 & 0.12 & 0.04 & 0 \\ 0.88 & 0.1 & 0.02 & 0 \\ 0.91 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0.04 \\ 0 & 0.98 & 0 & 0.02 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.88 & 0.12 \\ 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.91 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

За формулами з табл. 5 отримуємо такі матриці нечіткої безпомилковості структури  $A_1A_2$ :

$$\mathbf{P}_{A_1A_2} = \begin{bmatrix} 0.672 & 0.144 & 0.164 & 0.02 \\ 0.607 & 0.2 & 0.167 & 0.026 \\ 0.539 & 0.26 & 0.167 & 0.034 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0.184 \\ 0 & 0.808 & 0 & 0.192 \\ 0 & 0.799 & 0 & 0.201 \\ 0 & 0 & 0.836 & 0.164 \\ 0 & 0 & 0.774 & 0.226 \\ 0 & 0 & 0.706 & 0.294 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{\mathbf{P}}_{A_1A_2} = \begin{bmatrix} 0.672 & 0.144 & 0.164 & 0.02 \\ 0.792 & 0.119 & 0.081 & 0.008 \\ 0.91 & 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0.184 \\ 0 & 0.911 & 0 & 0.089 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.836 & 0.164 \\ 0 & 0 & 0.873 & 0.127 \\ 0 & 0 & 0.91 & 0.09 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З цих матриць отримуємо такі нечіткі числа в  $\alpha$ -формі:

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^1 = (0.539, 0.91)_0 \cup (0.608, 0.792)_{0.5} \cup (0.672, 0.672)_1;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0_1} = (0.09, 0.26)_0 \cup (0.119, 0.2)_{0.5} \cup (0.144, 0.144)_1;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0_2} = (0, 0.167)_0 \cup (0.081, 0.167)_{0.5} \cup (0.164, 0.164)_1;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0\&} = (0, 0.034)_0 \cup (0.008, 0.026)_{0.5} \cup (0.02, 0.02)_1.$$

Графіки функцій належностей цих нечітких ймовірностей зображено на рис. 1. За терм-множини {"Низька", "Нижче середньої", "Середня", "Вище середньої", "Висока"} нечіткі ймовірності з рис. 1 проінтерпретуємо таким чином:

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^1 = \langle 0.539, 0.91, \text{Нижче середньої} \rangle;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0_1} = \langle 0.09, 0.26, \text{Нижче середньої} \rangle;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0_2} = \langle 0, 0.167, \text{Висока} \rangle;$$

$$\tilde{P}_{A_1A_2}^{0\&} = \langle 0, 0.034, \text{Середня} \rangle.$$

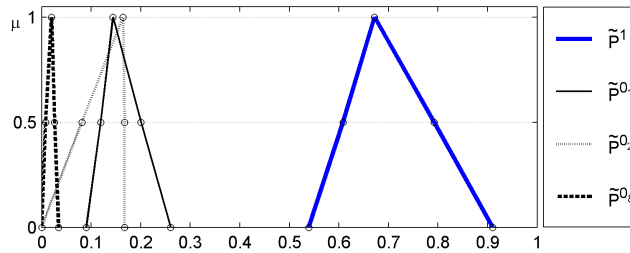


Рис. 1. Графіки функцій належності нечітких ймовірностей з прикладу 2

### Висновки

Розроблено комплекс нечітких моделей операторів, логічних умов та алгоритмічних структур за багатоарного врахування помилок функціонування, які дозволяють розрахувати показники надійності послідовних, паралельних, розгалужувальних та циклічних алгоритмів за нечітких початкових даних. Вони отримані нечітким узагальненням відомих чітких матричних моделей надійності АП з [7, 10]. Невизна результату полягає в тому, що на відміну від відомих нечітких моделей у вигляді матриць нечітких ймовірностей переходів між станами системи [8], вперше нечіткі моделі операторів та логічних умов представлено матрицями песимістичних та оптимістичних оцінок безпомилковості. Це дозволило, на відміну від громіздких нечітких моделей з [8], отримати компактні та прості нечіткі моделі безпомилковості алгоритмічних структур. Крім того, на відміну від матричних моделей надійності АП з [7, 8], які враховують лише помилки несумісних типів, запропоновані моделі враховують і сумісні помилки.

Практична цінність отриманих результатів полягає в тому, що на їх основі можна прогнозувати надійність АП на етапі проектування за доступними експертними оцінками характеристик надійності операторів та логічних умов.

### Література

1. Губинский А.И. Надежность и качество функционирования эргатических систем. – Л.: Наука. – 1982. – 270 с.
2. Информационно–управляющие человеко–машинные системы: Исследование, Проектирование, Испытания: Справочник / Адаменко А.Н., Губинский А.И., Ротштейн А.П. и др. М.: Машиностроение, 1993. – 528с.
3. Гвоздик М.И., Евграфов В.Г., Цой Е.Б. Оптимизация организационно-технических систем ВМФ. Методы. Алгоритмы. Программы. – СПб.: ВВМУРЭ, 1997. – 223 с.
4. Ашерев А.Т. Сажко Г.І. Ергономіка інформаційних технологій: оцінка, проектування, експертиза. Навч. посіб. – Харків: УПА, 2005. – 243 с.
5. Сафонов И.В. О формализованном надежностном анализе алгоритмических процессов // Управляющие системы и машины. – 1973. – №6. – С.92-95.
6. Дружинин Г.В. Надежность автоматизированных производственных систем. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 480 с.
7. Ротштейн А.П., Кузнецов П.Д. Проектирование бездефектных человеко-машинных технологий. – К.: Техніка. – 1992. – 180 с.
8. Ротштейн О.П., Штовба С.Д., Козачко О.М. Нечітке прогнозування надійності алгоритмів, що враховують помилки різних типів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2005. – №4. – С.77-85.
9. Ротштейн А.П., Штовба С.Д. Нечеткая надежность алгоритмических процессов. – Винница: Континент–ПРИМ, 1997.– 142 с.
10. Штовба С.Д. Матричні моделі надійності алгоритмічних процесів за сумісності помилок різних типів // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 2007. – №4.
11. Zimmermann H.-J. Fuzzy Sets Theory and Its Applications. 3<sup>rd</sup> ed. – Kluwer Academic Publisher, 1996. – 435 p.
12. Штовба С.Д. Нечіткі моделі надійності алгоритмічних структур // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2007. – №2. – С. 110–119.

Штовба Сергій Дмитрович, к.т.н., доцент,  
 професор кафедри комп'ютерних систем управління,  
 Вінницький національний технічний університет,  
 Хмельницьке шосе, 95, Вінниця, 21021  
[shtovba@ksu.vinnica.ua](mailto:shtovba@ksu.vinnica.ua) [www.vinnitsa.com/shtovba](http://www.vinnitsa.com/shtovba)  
 Тел.: (0432)-598430, 598222.

## **Нечіткі матричні моделі надійності алгоритмічних процесів за сумісних помилок**

**С.Д. Штовба**

Узагальнено на випадок нечітких початкових даних ймовірнісні матричні моделі надійності операторів, логічних умов та алгоритмічних структур, які враховують можливість суміщення помилок функціонування різних типів.

**Ключові слова:** алгоритмічний процес, надійність, помилки різних типів, нечітка ймовірність.

## **Нечеткие матричные модели надежности алгоритмических процессов, учитывающие совместимые ошибки**

**С.Д. Штовба**

Обобщены случаи нечетких исходных данных вероятностные матричные модели надежности операторов, логических условий и алгоритмических структур, которые учитывают возможность наложения ошибок функционирования разных типов.

**Ключевые слова:** алгоритмический процесс, надежность, ошибки разных типов, нечеткая вероятность.

## **Fuzzy Matrix Models for Algorithmic Process Reliability in Case of Compatibility Various Errors**

**Shtovba S.**

Probabilistic matrix reliability model of operators, logical conditions, and algorithmic structures are considered. The models are taken into account compatibility various errors during algorithm process executing. The models are extended on case of fuzzy source data.

**Keywords:** Algorithmic Process, Reliability, Errors of Various Types, Fuzzy Probability.